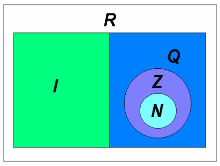
ESPACIOS MATEMÁTICOS

- **OBJETIVO:**

  Verificar que R^n cumple con las condiciones de los espacios matemáticos: Vectorial, Prehilbertiano, Normado, Métrico y Topológico.

- **INTRODUCCIÓN:**

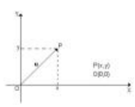


R es un cuerpo ordenado, completo y arquimediano

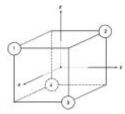
Del producto cruz se obtiene:

R x R = R^2 Plano (x, y)

R x R x R = R^3 Espacio (x, y, z)



Plano



Espacio

Del mismo modo se obtiene:

R^n = Espacio Euclidiano n-upla = (x_1, x_2 ,............... x_n)

- **DESARROLLO:**

(R^n ,+ , ·) Espacio Vectorial sobre R

1) (R^n ,+) grupo Abeliano

A1. Clausura de R^n con +.
A2. + es asociativa en R^n
A3. + es conmutativa en R^n
A4. $\exists\,!\ 0 = (0, 0,\ldots\ldots\ldots\ldots 0) \in R^n$
tal que $0 + X = X + 0 = X$
A5. $\exists$ un inverso $(-X) = (-x_1, -x_2,\ldots\ldots -x_n) \in R^n$
para cada $X \in R^n$ tal que $X + (-X) = 0$

2) (R^n , ·) cumple con la operación externa.

M1. Cierre o clausura con $\bullet$, para $k \in R$ y $\forall\ X \in R^n$ $k \bullet X \in R^n$
M2. $k \bullet (X + Y) = k \bullet X + k \bullet Y$ $\forall\ k \in R$, $\forall\ X, Y \in R^n$
M3. $k_1 \bullet (k_2 \bullet X) = (k_1 . k_2) \bullet X$ siendo $k_1, k_2 \in R$ y $X \in R^n$
M4. $(k_1 + k_2) \bullet X = k_1 \bullet X + k_2 \bullet X$ $\forall\ k_1, k_2 \in R$, $X \in R^n$
M5. $1 \bullet X = X$ $\forall\ X \in R^n$ 1 neutro de R.

(R^n , + , · , < , >) es un Espacio Prehilbertiano Real con un Producto Interno definido como: < X , Y > = å x_i y_i , i= 1,..........,n " X, Y Î R^n

1) (R^n , + , ·) es un espacio vectorial sobre R.

2) < X , Y > es un producto interno en R^n, si sólo si cumple con:

a) $< X, X > \geq 0$ $\forall\ X \in R^n$
b) $< X, X > = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall\ X \in R^n$
c) $< X, Y > = < Y, X >$ $\forall\ X, Y \in R^n$
d) $< \alpha X, Y > = < X, \alpha Y > = \alpha < X,Y >$ $\forall\ \alpha \in R$, $\forall\ X \in R^n$
e) $< X, Y+Z > = < X,Y > + < X,Z >$ $\forall\ X, Y, Z \in R^n$

(R^n , + , · , || ||)es un Espacio Normado y posee una Norma
definida por : | | X | | = (< X,X >)$^{1/2}$ = (å x_i ^{2})$^{1/2}$ " x_i Î R " X Î R^n i= 1,..........,n
y se llama Norma inducida por el producto interno en R^n.

1) (R^n , + , ·) es un espacio vectorial.

2) | | X | | es una norma en R^n si sólo si cumple con:

a) $\| X \| \geq 0$ $\forall\ X \in R^n$
b) $\| X \| = 0 \Leftrightarrow X = 0$ $X \in R^n$
c) $\| \lambda X \| = | \lambda | \| X \|$ $\lambda \in R$, $\forall\ X \in R^n$
d) $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$ $\forall\ X, Y \in R^n$
Desigualdad de Minkowski

(R^n, d_n) es un Espacio Métrico con la métrica inducida por la norma.
Definida por : $d_n = \| X - Y \|$ " X , Y Î R^n (Métrica Euclideana en R^n)

1) (R^n, + , ·) es un Espacio Vectorial.

2) $d_n = \| X - Y \|$
" X , Y Î R^n es la métrica inducida debe cumplir con:

a) $d_n(X,Y) \geq 0$ $\forall\ X, Y \in R^n$
b) $d_n(X,Y) = d_n(Y,X)$ $\forall\ X, Y \in R^n$
c) $d_n(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ $\forall\ X, Y \in R^n$
d) $d_n(X,Z) \leq d_n(X,Y) + d_n(Y,Z)$ $\forall\ X, Y, Z \in R^n$

Métricas usuales

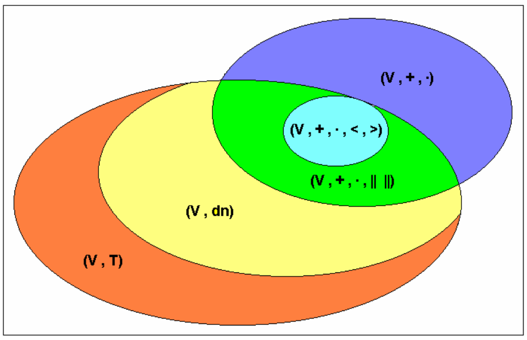
- en R , $d_1 = |x - y|$ $\forall\ x,y \in R$
- en R^2, $d_2(X , Y) = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{1/2}$

$X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ $\forall\ x,y \in R^2$

- en R^n $d_n(X,Y) = (\Sigma (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ $\forall\ X , Y \in R^n$ i=1....,n

(R^n , T d_n) es Espacio Topológico Inducido por una Métrica.

T es una Topología Inducida por una Métrica d si:
1)(R^n ,d) Espacio Métrico.
2)T = { A / (A Ì R^n) ^ (x Î A Þ $ Sr (x) / x Î Sr (x) Ì A }



Sea en **(R^n , d_n)** la métrica **d_n (X,Y) = (å (x_i - y_i) ^{2})$^{1/2}$ " X , Y Î R^n**
i=1....,n

Sr(X) = { y ∈ R^n **/ d_n (X,Y) < r }=** { y ∈ R^n/**(å (x_i - y_i) ^{2})$^{1/2}$ < r** } Esfera abierta o Vecindad

T d_n = { A / (A Ì R^n) ^ (X Î A Þ $ Sr (x) / X Î Sr (x) Ì A }

Sebastián Angel *Instituto Cardenal Spínola*
Pablo Amster *Departamento de Matemática, UBA, FCEyN*