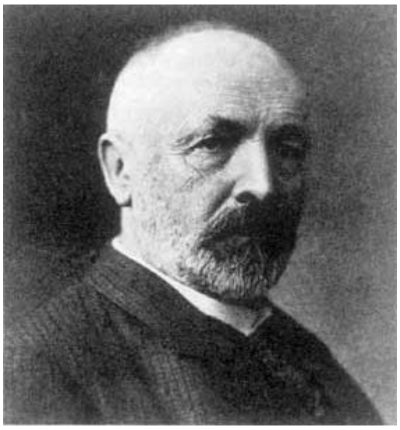


Georg Cantor

$\aleph$

Un acercamiento a la profundidad del infinito matemático

Federico Barabas
Colegio Nacional de Buenos Aires
Taller de matemática a cargo de Dr. Pablo Amster
Departamento de Matemática - FCEN - UBA

El acto de contar

Al contar unos pocos elementos, si lo analizamos cuidadosamente, vemos que intentamos hacer una correspondencia biunívoca entre cada dedo y cada elemento, de manera tal que no sobre ningún dedo ni elemento. Es lo que se llama una relación **biyectiva**. Cuando hemos cubierto todos los elementos a contar, decimos que su cantidad es la misma que dedos empleados a tal efecto.

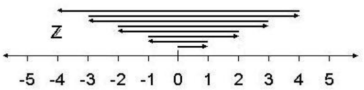
A la hora de contar los elementos de conjuntos numéricos, vamos a compararlos, en lugar de los dedos de la mano, con el conjunto de los números naturales (N) = {1,2,3,4,…}. Escribimos "la cantidad de elementos del conjunto A" como #(A) y se lee "cardinal de A". Cuando el conjunto a analizar resulta de igual cantidad de elementos que N, decimos que es **numerable**.

Numerabilidad de conjuntos numéricos

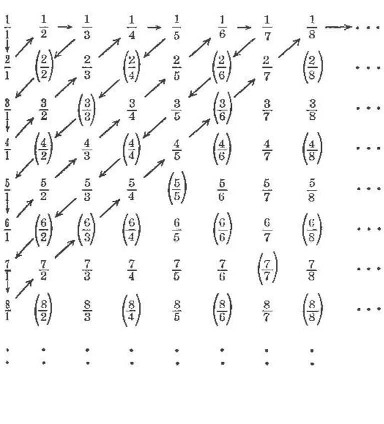
Para demostrar que un determinado conjunto tiene igual cantidad de elementos que N, debemos probar que a cada elemento de nuestro conjunto podemos asignarle un elemento de N, y cada número natural tendrá su antecedente en uno de A. Dicho de otro modo, para cualquier elemento de N encontramos uno de nuestro conjunto y viceversa.

Si encontramos tal relación biyectiva sabremos que **#(A) = #(N)**.

¿Será Z numerable? ¿Es decir, tendrá igual cantidad de elementos que N?



Sólo es cuestión de elegir una forma de corresponder Z con N de manera tal que estemos seguros de que para cualquier elemento de Z encontraremos uno de N. Una forma posible para abarcar todo Z sería comenzar por el 0, luego el 1 y su opuesto, el 2 y su opuesto, etc (ver figura). Así formamos pares ordenados de la forma (Z,N): (0,1), (1,2), (-1,3), (2,4), (-2,5)…



Podemos probar que Q también es numerable usando una técnica similar llamada "la diagonal de Cantor". Vemos que si recorremos el gráfico en forma diagonal (siguiendo las flechas) estaremos seguros de la inclusión de toda fracción posible. Conclusión: **#(Q) = #(N)**. Hay tantas fracciones como números naturales.

¿Será R (el conjunto de los números reales, es decir, la recta) también numerable? En principio podemos suponer que sí y, en ese caso, es posible escribir una lista con absolutamente todos los elementos de R entre 0 y 1. Dicha lista tendría este aspecto:

$A= 0,\mathbf{a_1}a_2a_3a_4\ldots$
$B= 0,b_1\mathbf{b_2}b_3b_4\ldots$
$C= 0,c_1c_2\mathbf{c_3}c_4\ldots$
$D= 0,d_1d_2d_3\mathbf{d_4}\ldots$
etc.

Sin embargo, podemos construir el número $a=0,a_1a_2a_3a_4\ldots$ de manera tal que $a_1 ? a_1$, $a_2 ? b_2$, $a_3 ? c_3$, $a_4 ? d_4$, etc. Así obtendremos un número que diferirá, al menos, en un dígito con respecto a cada número de la lista. Sin embargo sigue estando entre 0 y 1, y como habíamos presupuesto que nuestra lista contenía a **todos** los números entre 0 y 1, se produce una contradicción que llamamos **absurdo**. No hay forma de confeccionar tal lista. Por lo tanto tenemos que negar nuestra hipótesis. Conclusión: R no es numerable. **#(R) ? #(N)**

El infinito

Vimos que si bien tanto N como R tienen infinita cantidad de elementos, #(R) ? #(N). De ahí se deduce que debe haber más de un infinito, y por lo tanto, infinitos más grandes que otros. Llamamos a estos números **transfinitos**.

Llamamos $_0$ (aleph subcero) al infinito de los números naturales y c (continuo) al infinito de los números reales. Como $?_0$ es numerable por definición, cualquier adición de la forma $_0$ + b será igual a $_0$, sea b un número finito o transfinito, ya que continuará siendo numerable. Por otra parte, de la demostración de la numerabilidad de los Z parece claro que 2 . $_0$ = $_0$ y de la demostración de la numerabilidad de los Q deducimos que $?_0^2$ = $?_0$ (recordar la figura **cuadrada** de la diagonal de Cantor).

A pesar de todo, sabemos que c es mayor que $?_0$. ¿Existe algún número entre el infinito de los números naturales y el de los reales? Se trata de la hipótesis del continuo, la mayor y última preocupación de Cantor. En parte por la extrema abstracción que una respuesta requería y también por la constante resistencia que sus ideas despertaban en el ámbito científico, Cantor enloqueció en el proceso. En la década de 1930, Kurt Gödel demostró que la hipótesis del continuo es indemostrable y, finalmente, en 1963, Cohen demostró que es irrefutable.

"En matemática, el arte de formular una pregunta ha de tenerse en mayor estima que resolverla"
Georg Cantor